Prof. Dr. Alfred Toth

Was ist qualitativ an der qualitativen Mathematik?

1. In Benses frühem Buch „Geist der Mathematik“, das er als noch vor seinem 30. Geburtstage schrieb, finden sich folgende bemerkenswerte Zeilen, die nicht nur einige zentrale Konzepte aus Benses erst Jahrzehnte später einsetzendem semiotischem Werk, sondern auch aus seines Freundes Gotthard Günthers ebenfalls erst viel später entstandenem Werk zu einer einer mehrwertigen, polykontexturalen Logik vorwegnehmen.

> Darüber hinaus aber muß man sich immer wieder versichern, daß mit der Entwicklung der Mathematik von der bloßen Größenlehre zur reinen Zeichenlehre unsere Disziplin sich jenseits jeder Problematik von Quantität und Qualität postuliert. Im modernen Arithmetismus ist die Zahl nicht pure Quantität. Sie ist „Zeichen“, und man kann nicht einmal behaupten, daß es sich in dieser Zeichenlehre um Qualitätenlehre, um qualitative Mathematik handelt. Schon in der Tatsache, daß, wie bereits bemerkt, komplexe Zahlen solchen Zahlenzeichen darstellen, in deren Axiomatik das Prinzip von Größer oder Kleiner – das alle reellen Zahlen auszeichnet – ja nicht vorkommt, deutet an, daß wir es hier nicht mit reinen Größenunterschieden zu tun haben, sondern mit mathematischen Unterschieden, die als PURE UNTERSCHIEDE schlechthin Seinscharakter haben. Als reine Zeichenlehre baut die moderne abstrakte Mathematik ein formales, nur auf Sein oder Nichtsein von Etwas abzielendes System von puren Unterscheidungen auf, die quantitativ nicht zu verstehen sind. Es ist ein System von Unterschiedenem, ein System formaler Individualitäten. Man kann sich vorstellen, daß das ganze Leibnizsche Monadensystem hier seines essentiellen Charakters entkleidet ist und als reine, formale Monadologie wiederkehrt. Damit etwa trifft man den Seinsgehalt der neueren Mathematik. (Bense 1939, S. 159)

2. Zunächst zur „Zahl als Zeichen“. Bense hatte in erst in Bense (1980, S. 288) die Zahl (Za) als Zeichen definiert

ZaR = R(Za(M), Za(O), Za(I)).

Danach besitzt also die Zahl nicht nur einen Mittel-, sondern auch einen Objekt- und einen Interpretantenbezug, d.h. sie zählt auch hinsichtlich der Bezeichnungs- und der Bedeutungsfunktion von Zeichen. Zahl und Zeichen fallen damit definitorisch zusammen, denn nicht nur das Zeichen, sondern auch die Zahl bezeichnet nach dieser Definition ein Objekt und bettet es in einen Kontext oder „Konnex", wie Bense sich ausdrückte, ein. Diese Gleichsetzung von Zahl und Zeichen führte Bense dann am Ende seines Lebens bekanntlich zur Bestimmung der eigenrealen, dualinvarianten, d.h. ihrer Realitätsthematik gleichen Zeichenthematik

ZTh = (3.1, 2.2, 1.3)

×ZTh = RTh = (3.1, 2.2 1.3)

als Dualsystem der „Zahl als solcher" (vgl. Bense 1992).

Etwas anders verhält es sich mit der Umkehrung, mit der Definition des „Zeichens als Zahl". Hierzu findet sich bereits ein Beweis in Bense (1975, S. 167 ff.). Analog zu den Peano-Axiomen formulierte Bense

1. Der Präsentant ist ein Repräsentant.

2. Der Repräsentant eines Repräsentanten ist ein Repräsentant.

3. Es gibt keine zwei Präsentanten mit dem gleichen Repräsentanten.

4. Der Präsentant ist nicht Repräsentant eines Repräsentanten.

In Benses eigenen Worten: „Damit ist die Explikation des Axiomensystems der natürlichen Zahlen als verallgemeinerte Nachfolgerelation im Sinne des semiotischen Repräsentationsschemas der universalkategorisch fundierten und geordneten triadischen Zeichenrelation gewonnen" (1975, S. 171).

3. Wie aus Benses einleitendem Text klar hervorgeht, liegt innerhalb der Mathematik für ihn die Einbruchstelle von Qualität in Quantität genau dort, wo die Mathematik keine reine „Größenlehre" mehr ist, in anderen Worten, wo die Nachfolgerrelation der Peano-Axiome keine lineare Zeichenfolge mehr erzeugt. Bekanntlich ist diese bereits bei den von Bense erwähnten komplexen Zahlen nicht mehr gegeben, da es sich hier per definitionem um flächige Zahlen handelt, d.h. um Zahlen, die an zwei Zahlenachsen gezählt werden. Genau so verhält es sich nun mit den Subzeichen der von Bense (1975, S. 37) eingeführten semiotischen Matrix

	.1	.2	.3
1.	1.1	1.2	1.3
2.	2.1	2.2	2.3
3.	3.1	3.2	3.3

Zwar gilt auch hier natürlich sowohl bei den triadischen Zeichenzahlen

(1.)

N(1.) = (2.)

NN(1.) = N(2.) = (3.)

als auch bei den trichotomischen Zeichenzahlen

(.1)

N(.1) = (.2)

NN(.1) = N(.2) = (.3),

aber bei allen nicht-homogenen Zeichenzahlen, d.h. bei den Paaren der Form S = (x.y) mit $x \neq y$ gibt es keine Eindeutigkeit der von Bense erwähnten Größer-Kleiner-Relation mehr

(1.2), (2.1)

(1.3), (3.1)

(2.3), (3.2),

denn bei diesen Zeichenzahlen gilt entweder

(x.) > (y.) und (y.) < (x.)

oder

(x.) < (y.) und (y.) > (x.).

Schließlich ist nur ein kleiner Schritt von den komplexen Zahlen und den Zeichenzahlen zu den in Toth (2016) zusammenfassend dargestellten ortsfunktionalen Zahlen, bei denen bekanntlich neben der linearen Peano-Zählweise auch die nicht-peanosche vertikale und die beiden diagonalen Zählweisen unterschieden werden. Man kann diese vermöge Ortsabhängigkeit der Zahl definierten drei Zählweisen sehr schön bereits anhand der benseschen Matrix aufzeigen. Dann haben wir drei linear-adjazente Zählweisen

$(1.1) < (1.2) < (1.3)$

$(2.1) < (2.2) < (2.3)$

$(3.1) < (3.2) < (3.3)$,

drei vertikal-subjazente Zählweisen

$$\begin{array}{ccc}
(1.1) & (1.2) & (1.3) \\
\wedge & \wedge & \wedge \\
(2.1) & (2.2) & (2.3) \\
\wedge & \wedge & \wedge \\
(3.1) & (3.2) & (3.3)
\end{array}$$

und zwei Mal drei diagonal-transjazente Zählweisen, die hauptdiagonale

$$\begin{array}{cccccccc}
(1.1) & & & & (1.2) & & & (1.3) \\
 & (2.2) & & & & (2.3) & & \\
 & & (3.3) & & & & &
\end{array}$$

und die nebendiagonale

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & (1.3) & & & (1.2) & & (1.3) \\
 & (2.2) & & & (2.1) & & & \\
(3.1). & & & & & & &
\end{array}$$

4. Ein sehr wesentlicher Punkt, der heute noch genauso wegweisend ist wie er es 1939 war, scheint mir ferner in Benses Feststellung zu liegen, bei den Zeichenzahlen handle es sich um ein „nur auf Sein oder Nichtsein von Etwas abzielendes System von puren Unterscheidungen, die quantitativ nicht zu verstehen sind“. Der Grund für das Einbrechen von Qualität in Quantität dort, wo die Mathematik aufhört, bloße „Größenlehre“ zu sein, wird also nach Bense durch die seinssetzende Qualität der Differenz verursacht. Damit nimmt Bense nicht nur den zentralen Gedanke der erst 1969 veröffentlichten Theorie der „Laws of Form“ von Spencer-Brown, sondern auch der erst vor wenigen Jahren

publizierten Ergebnisse der polykontexturalen Logik und Mathematik vorweg (vgl. z.B. Kaehr 2012). Die Differenz zwischen Sein und Nichtsein wird allerdings auf dem Boden der 2-wertigen aristotelischen Logik auf höchst problematische Weise durch eine Dichotomie der Form

$L = (0, 1)$

ausgedrückt, darin aber der Wert, der die Negation ausdrückt (0) und der Wert, der die Position ausdrückt (1) spiegelbildlich sind. Vgl. hierzu den treffenden Kommentar von Günther: „Beide Werte einer solchen Logik aber sind metaphysisch äquivalent. Das heißt, man kann sie beliebig miteinander vertauschen. Sie verhalten sich zueinander in einer totalen logischen Disjunktion, wie rechts und links. Es gibt keinen theoretischen Grund, welche Seite rechts und welche Seite links von der Zugspitze ist. Die Benennung beruht auf einer willkürlichen Entscheidung, und wenn man seinen Standpunkt wechselt, sind die rechte und die linke Seite miteinander vertauscht (Günther 2000, S. 230 f.).

Das bedeutet aber, daß

$L = (0, 1) = L^{-1} = (1, 0)$

gilt, d.h. daß jeder der beiden Werte der 2-wertigen Logik nichts haben kann, was der andere Wert nicht bereits hat. (Aus diesem Grunde ist auch $\neg\neg 0 = 0$ und $\neg\neg 1 = 1$.)

Der Grund dafür, daß die Differenz nicht auftritt in L, d.h. daß wir nicht

$L = (0 \mid 1)$

haben, ist natürlich das Prinzip des Tertium non datur, d.h. die Differenz selbst wäre dann das Dritte, welches die 2-wertigkeit der Logik außer Kraft setzte. Wie ich allerdings bereits in Toth (2015) ausgeführt hatte, bezieht sich dieses Grundgesetz des Denkens nur auf substantielle Werte, nicht jedoch auf nicht-substantielle. Wir können daher definieren

$\mid := E$

mit

$E = x \rightarrow (x)$,

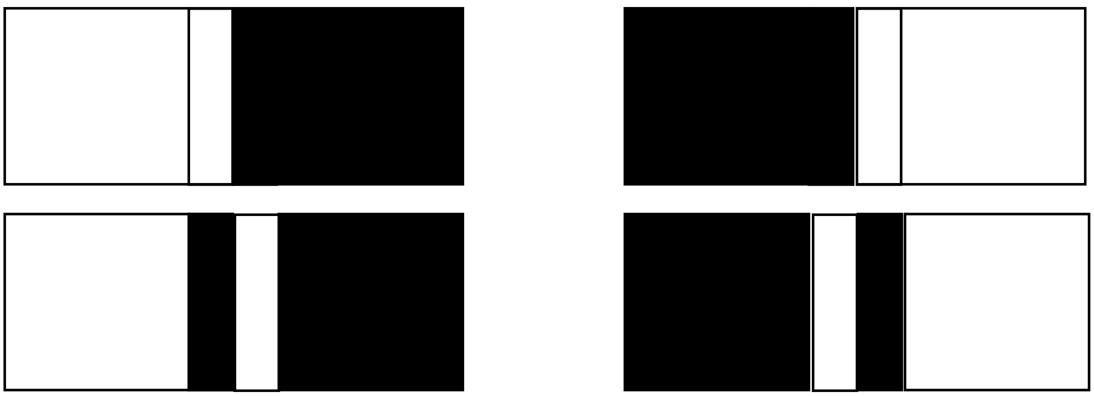
d.h. der Differenzoperator wird als Einbettungsoperator definiert. Dann bekommen wir

$E \to L =$

$L_1 = (0, (1))$ $L_3 = L_1^{-1} = ((1), 0)$

$L_2 = ((0), 1)$ $L_4 = L_2^{-1} = (1, (0))$,

d.h. ein Quadrupel von einbettungstheoretisch differenzierten L-Funktionen, darin jeder der beiden Werte von jedem anderen Wert funktional abhängig ist. Man kann dies auch mittels Venn-Diagrammen darstellen. Stehe weiß für 0 und schwarz für 1 (oder umgekehrt), dann haben wir



Die Werte in einer solchen Logik sind also vermöge eines differentiellen Tertiums vermittelt. In Sonderheit gilt somit für die Differenz |

$(0 \mid 1) \neq (1 \mid 0)$.

Literatur

Bense, Max, Geist der Mathematik. Berlin 1939

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: Ars Semeiotica 3/3, 1980, S. 287-294

Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992

Günther, Gotthard, Die amerikanische Apokalypse. München 2000

Kaehr, Rudolf, Finite State Machines and Morphogrammatics. Machines on Differences: A Contribution to Saussure-Derrida Machines. In: http://www.vordenker.de/rk/rk_Finite-State-Machines-and-Morphogrammatics_2012.pdf

Spencer-Brown, George, Laws of Form. London 1969

Toth, Alfred, Die Logik des Jägers Gracchus. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015

Toth, Alfred, Einführung in die elementare qualitative Arithmetik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2016

25.6.2019